



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

05F

D

دوپینگ ماز

@Doping_Maze | @BioMazeFree

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۲/۳۰

دفترچه پاسخ ریاضی

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح	ویراستار
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسونند
	مهدی حاجی نژادیان

۱- اگر $a + \frac{3}{a} = 5$ مقدار $\frac{a^3}{9} + \frac{3}{a^3}$ چه عددی است؟

$$\frac{60}{27} \quad (4)$$

$$\frac{80}{9} \quad (3)$$

$$\frac{80}{27} \quad (2)$$

$$\frac{60}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

دو طرف فرض را به توان ۳ می‌رسانیم و از اتحاد بالا استفاده می‌کنیم.

$$a + \frac{3}{a} = 5$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{3}{a}\right)^3 = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a^3} + 3a \cdot \frac{3}{a} \underbrace{\left(a + \frac{3}{a}\right)}_5 = 125$$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{27}{a^3} + 45 = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a^3} = 80$$

دو طرف را بر ۹ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a^3}{9} + \frac{3}{a^3} = \frac{80}{9}$$

۲- با فرض $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2} = 4$ حاصل جذر $4x+3$ کدام است؟

$$1/5 \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

یکی از رادیکال‌ها را به سمت راست منتقل می‌کنیم و سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x+2} \Rightarrow x+6 = (4 - \sqrt{x+2})^2$$

$$\Rightarrow x+6 = 16 + x+2 - 8\sqrt{x+2} \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow 4(x+2) = 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x+3 = 4 \Rightarrow \sqrt{4x+3} = 2$$

۳- اگر $x-2$ یکی از عوامل تجزیه $x^3 + 2x^2 + ax - 6$ باشد، مجموع دو عامل دیگر آن کدام است؟

$$2x-4 \quad (4)$$

$$2x+4 \quad (3)$$

$$2x+2 \quad (2)$$

$$2x-2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

چون $x-2$ یکی از عوامل چندجمله‌ای داده شده است، پس مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=2$ برابر صفر است.

$$x^3 + 2x^2 + ax - 6 = 0 \xrightarrow{x=2} 8 + 8 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = -5$$

حال عبارت مفروض را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم تا عامل دیگر به دست آید:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x-2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x-2)(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

دو عامل دیگر، $x+1$ و $x+3$ هستند که مجموع آنها $2x+4$ است.





۴- با فرض $A = 18^{\frac{1}{3}} \times 24^{\frac{1}{2}}$ جذر عدد $A \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{6}}$ کدام است؟

$$6\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: ویژگی‌های توان گویا:

$$a^m b^m = (ab)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$b^{\frac{1}{n}} a = \sqrt[n]{b^{\frac{1}{n}} a}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{m} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{mb}$$

به کمک ویژگی‌های توان‌های گویا ابتدا A را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= 18^{\frac{1}{3}} \times 24^{\frac{1}{2}} = (3^2 \times 2)^{\frac{1}{3}} \times (2^3 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3} + \frac{3}{2}} = 3^{\frac{7}{6}} \times 2^{\frac{11}{6}} \end{aligned}$$

حال عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A \sqrt[3]{9\sqrt{6}} &= A \sqrt[3]{9^{\frac{1}{2}} \times 6} = A \sqrt[3]{3^2 \times 3 \times 2} = A \sqrt[3]{3^3 \times 2} \\ &= 3^{\frac{7}{6}} \times 2^{\frac{11}{6}} \times \sqrt[3]{3^3 \times 2} = 3^{\frac{7}{6}} \times 2^{\frac{11}{6}} \times 3^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^2 \times 2^2 = 36 \Rightarrow \text{جذر} = 6 \end{aligned}$$

۵- حاصل عبارت $P = t^2 + t + 1$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ چقدر است؟

$$\sqrt{5} - 1 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول: به جای t مقدار $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ را جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5}}{4} + 1 = \frac{4}{4} + 1 = 2 \end{aligned}$$

روش دوم: از رابطه $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ، رادیکال را تنها می‌کنیم و سپس دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} &\Rightarrow 2t = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} = 1 + 2t \\ 5 &= (1 + 2t)^2 = 1 + 4t + 4t^2 \Rightarrow t + t^2 = 1 \Rightarrow P = 2 \end{aligned}$$

۶- هرگاه $x = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$ مقدار $x^3 - 12x$ چه عددی است؟

$$20 \quad (۴)$$

$$12 \quad (۳)$$

$$12\sqrt[3]{4} \quad (۲)$$

$$12\sqrt[3]{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴





نکته: اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$x = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow x^3 = (\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})^3$$

$$\Rightarrow x^3 = (\sqrt[3]{4})^3 + (2\sqrt[3]{2})^3 + 3(\sqrt[3]{4})(2\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})$$

$$= 4 + 16 + 6\sqrt[3]{8}x = 4 + 16 + 12x \Rightarrow x^3 - 12x = 20$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

۷- اگر $A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ باشد، حاصل $(A+1)^3$ کدام است؟

$$\sqrt[3]{2} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اتحاد چاق و لاغر:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{2} - 1$ ضرب می‌کنیم.

$$A = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1$$

پس $A+1 = \sqrt[3]{2}$ و در نتیجه $(A+1)^3 = 2$.

۸- هرگاه α, β ریشه‌های $2x(x-2) = 3$ باشند، معادله درجه دوم با ریشه‌های $\frac{2}{1-\alpha}, \frac{2}{1-\beta}$ کدام است؟

$$5x^2 - 8 = 0 \quad (4)$$

$$8x^2 - 5 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 8 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ به ترتیب برابر $\frac{-b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ است.

نکته ۲: اگر $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α و β باشد به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد.

ابتدا دقت کنید α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 4x - 3 = 0$ هستند پس $\alpha + \beta = 2$ و $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$.

حال باید $S = \frac{2}{1-\alpha} + \frac{2}{1-\beta}$ و $P = \frac{2}{1-\alpha} \cdot \frac{2}{1-\beta}$ را محاسبه کنیم.

$$S = \frac{2}{1-\alpha} + \frac{2}{1-\beta} = \frac{2-2\beta+2-2\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{4-2(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{4-2(2)}{1-2+(-\frac{3}{2})} = .$$

$$P = \frac{2}{1-\alpha} \cdot \frac{2}{1-\beta} = \frac{4}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{4}{1-2-\frac{3}{2}} = \frac{-8}{5}$$

$$\text{جواب: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{8}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 8 = 0$$



۹- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 12 = 0$ رابطه $\beta = \frac{-22}{2\alpha + 1}$ برقرار است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

با توجه به نکته بالا، بین α و β روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -m \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -12 \end{cases}$$

حال از رابطه‌ای که در سؤال داده شده استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-22}{2\alpha + 1} = \beta \Rightarrow -22 = 2\alpha\beta + \beta \Rightarrow -22 = -24 + \beta$$

-۱۲

$$\Rightarrow \beta = 2$$

چون $\alpha\beta = -12$ پس $\alpha = -6$ و در نتیجه طبق رابطه $\alpha + \beta = -m$ مقدار m برابر ۴ به دست می‌آید.

۱۰- هرگاه $\alpha, \beta, -2$ ریشه‌های معادله $x^3 + mx^2 - 5x - 3m = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

@Doping_Maze | @BioMazeFree

نکته: اگر α ریشه معادله $f(x) = 0$ و f یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(\alpha) = 0$ است.

$x = -2$ ریشه معادله است، پس:

$$x^3 + mx^2 - 5x - 3m = 0 \Rightarrow -8 + 4m + 10 - 3m = 0 \Rightarrow m = -2$$

حال، معادله به صورت $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ است که چون $x = -2$ یکی از ریشه‌هاست، پس به $x + 2$ تجزیه می‌شود که با تقسیم عبارت بر $x + 2$ ، عامل دیگر به دست می‌آید.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x^2 - 4x^2 + 3) = 0$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3 + 1 = 4$$

با توجه به عبارت فوق دو ریشه دیگر که α, β هستند دارای مقادیر ۱ و ۳ می‌باشند، در نتیجه:

۱۱- معادله $(a-1)x^2 + (a+2)x - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است، حدود a کدام است؟

 $a > 1$ (۴) $-2 < a < 0$ (۳) $-8 < a < -2$ (۲) $a < -8$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: در معادله درجه ۲، شرط وجود دو ریشه، آن است که $\Delta > 0$ باشد.

نکته ۲: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بین ریشه‌ها روابط $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ برقرار است.



برای آنکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (a+2)^2 + 4(a-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a > 0 \Rightarrow a < -4, a > 0$$

$$2) S = \alpha + \beta = -\frac{a+2}{a-1} \xrightarrow{S < 0} \frac{a+2}{a-1} > 0 \Rightarrow a < -2, a > 1$$

$$3) P = \alpha\beta = \frac{-1}{a-1} \xrightarrow{P > 0} a-1 < 0 \Rightarrow a < 1$$

اشتراک سه شرط بالا به صورت $a < -4$ است.

۱۲- نمودار سهمی $y = mx^2 - 3x + m - 2$ از هر چهار ناحیه مختصات عبور می کند، حدود m کدام است؟

$$-2 < m < 0 \quad (4)$$

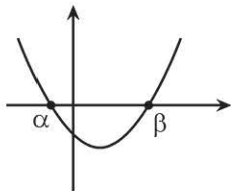
$$0 < m < 2 \quad (3)$$

$$m < -2 \quad (2)$$

$$m > 2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، a و c مختلف‌العلامت باشند، آنگاه $\Delta > 0$ و نمودار آن از چهار ناحیه عبور می کند (دو ریشه مختلف‌العلامت دارد).



$$ac < 0 \Rightarrow m(m-2) < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

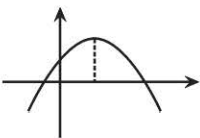
۱۳- هرگاه نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ شکل مقابل باشد، کدام گزینه الزاماً مثبت است؟

$$c - ab \quad (2)$$

$$ab + c \quad (1)$$

$$ac + b \quad (4)$$

$$a - bc \quad (3)$$

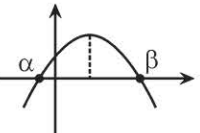


پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

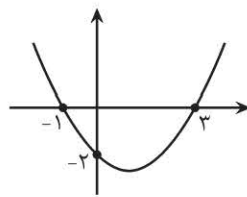
نکته ۲: اگر نمودار سهمی رو به پایین باشد، آنگاه $a < 0$ است. با توجه به نمودار f ، معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. به طوری که مجموع آنها مثبت است.



$$\begin{cases} \alpha + \beta > 0 \\ \alpha\beta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} c > 0 \end{cases}$$

چون $ab < 0$ پس $-ab > 0$ و چون $c > 0$ پس $c - ab$ مثبت است.





۱۴- شکل مقابل نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، مقدار b کدام است؟

-۲ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

-۳ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

نکته: معادله سهمی که ریشه‌های آن α و β باشد، به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ می‌باشد.

در این سؤال ریشه‌ها برابر ۳ و -۱ است و در ضمن عرض از مبدأ، یعنی $f(0)$ ، برابر -۲ است.

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

$$f(0) = a \times 1 \times (-3) = -2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x - 3) = \frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$$

پس $b = -\frac{4}{3}$ است.

۱۵- بیشترین مقدار تابع $f(x) = -2x^2 + 8x + m$ برابر ۲ است، اختلاف صفرهای این تابع چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

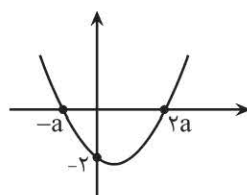
پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: عرض رأس سهمی (ماکزیمم یا مینیمم سهمی) برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

نکته ۲: اختلاف صفرهای یک تابع درجه دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{64 + 8m}{-8} = 2 \Rightarrow m = -6$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{64 + 8(-6)}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$



۱۶- نمودار سهمی $y = f(x)$ شکل مقابل است حداقل مقدار تابع $y = f(x)$ کدام است؟

$-\frac{9}{4}$ (۲)

$-\frac{9}{4}$ (۱)

$-\frac{15}{4}$ (۴)

$-\frac{11}{4}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: معادله سهمی که نمودار آن محور x را در نقاط α و β قطع می‌کند، به صورت $a(x - \alpha)(x - \beta)$ است.

نکته ۲: رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

در این تست ریشه‌ها $-a$ و $2a$ است.

$$f(x) = k(x + a)(x - 2a)$$





$$f(\cdot) = -2 \Rightarrow -2 = k(a)(-2a) \Rightarrow k = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a^2}(x+a)(x-2a)$$

طول رأس سهمی وسط ریشه‌هاست.

$$x_s = \frac{-a+2a}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow y_s = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{a^2} \times \frac{3a}{2} \times \left(\frac{-3a}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

۱۷- اتومبیلی مسافتی معادل سیصد کیلومتر را با سرعت ثابت از شهر A به شهر B طی می‌کند. در برگشت سرعت خود را ۱۰ کیلومتر بر ساعت اضافه می‌کند و به همین جهت ۵ ساعت زودتر می‌رسد، سرعت مسیر رفت چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

۳۰ (۴)

۱۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

سرعت مسیر رفت را X کیلومتر بر ساعت فرض کنید:

$$\text{زمان رفت: } t_1 = \frac{300}{X}$$

$$\text{زمان برگشت: } t_2 = \frac{300}{X+10}$$

$$t_2 = t_1 - 5 \Rightarrow \frac{300}{X} - \frac{300}{X+10} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{300X + 3000 - 300X}{X(X+10)} = 5$$

$$\Rightarrow X(X+10) = 600$$

$$\Rightarrow X^2 + 10X - 600 = 0$$

$$\Rightarrow (X-20)(X+30) = 0 \Rightarrow X = 20$$

۱۸- کارگری یک کار را به تنهایی ۴۰ روزه انجام می‌دهد بعد از ۱۰ روز کاری چند کارگر جدید با همان مهارت اضافه کنیم تا مابقی کار در طی دو روز تمام شود؟

۱۴ (۴)

۱۶ (۳)

۳۲ (۲)

۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

وقتی یک کارگر در ۴۰ روز کار را انجام می‌دهد پس در یک روز، $\frac{1}{40}$ کار را انجام می‌دهد.

درواقع در ۱۰ روز اول، $\frac{10}{40}$ کار انجام می‌شود. کار از این جا به بعد در دو روز انجام می‌شود یعنی در هر روز $\frac{15}{40}$ کار محقق می‌شود که چون

سرعت هر یک کارگر $\frac{1}{40}$ است، پس ۱۵ کارگر با هم کار می‌کنند، یعنی ۱۴ کارگر دیگر به اتفاق کارگر اول، این کار را به سرانجام رسانده‌اند.

۱۹- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{a}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 2$ برابر ۴ است، حاصل ضرب این ریشه‌ها چه قدر است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



برای حل کسرهای گویا، دو طرف تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$(x-1)(x+1)\left(\frac{a}{x-1} + \frac{3}{x+1}\right) = (x-1)(x+1) \times 2$$

$$\Rightarrow a(x+1) + 3(x-1) = 2(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - (3+a)x + 1 - a = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{3+a}{2} \xrightarrow{S=2} \frac{3+a}{2} = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{1-a}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

۲۰- ریشه بزرگ‌تر معادله $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$ برابر a است، حاصل $a - \frac{4}{a}$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای حل عبارات رادیکالی با فرجه‌ی دو، دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم. باید دقت کنید دو طرف تساوی هم‌علامت باشند و در ضمن جواب به دست آمده باید در دامنه باشد.

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x+1 = (\sqrt{x}+1)^2 = x+1+2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$$

جواب بزرگ‌تر ۴ است پس $a = 4$ و در نتیجه $a - \frac{4}{a} = 4 - \frac{4}{4} = 3$ است.

۲۱- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2x = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$ چه قدر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید $x^2 + 2x = t$ پس:

$$t = \sqrt{2t+3} \xrightarrow{t \geq 0} t^2 = 2t+3 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = -1, 3$$

چون $t \geq 0$ است پس $t = 3$ قابل قبول است.

$$t = x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -3 \Rightarrow x_1 - x_2 = 4$$

۲۲- عبارت درجه دوم $P = (m+3)x^2 + mx - m$ به ازای جميع مقادیر حقیقی x ، مثبت است، حدود m کدام است؟

 $m > -3$ (۴) $m > 0$ (۳) $-3 < m < 0$ (۲) $-\frac{12}{5} < m < 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



نکته: عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ به شرطی همواره مثبت است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$(m+3)x^2 + mx - m > 0$$

$$\begin{cases} m+3 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m^2 + 4m(m+3) < 0 \end{cases}$$

$$m^2 + 4m(m+3) < 0 \Rightarrow 5m^2 + 12m < 0$$

$$\Rightarrow m(5m+12) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{5} < m < 0$$

جواب اخیر شرط $m > -3$ را هم دارد.

۲۲- مجموعه جواب نامعادله $0 < 4 + \frac{10}{x} < 4$ کدام بازه‌ی زیر است؟

$$(-\infty, -2/5)(4)$$

$$(-\infty, 0)(3)$$

$$(0, 2/5)(2)$$

$$(-2/5, 0)(1)$$

پاسخ: گزینه ۴

دو نامساوی زیر را حل می‌کنیم و سپس بین مجموعه جواب آنها، اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} 4 + \frac{10}{x} > 0 \Rightarrow \frac{4x+10}{x} > 0 \Rightarrow x < -\frac{10}{4} \text{ یا } x > 0 \\ 4 + \frac{10}{x} < 4 \Rightarrow \frac{10}{x} < 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

اشتراک دو جواب بالا به صورت $x < -2/5$ است.

۲۴- مساحت محدود به نمودار تابع $y = |x-2|$ و خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ چه قدر است؟

$$6(4)$$

$$12(3)$$

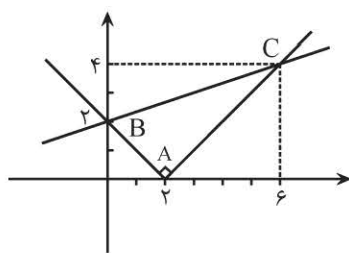
$$8(2)$$

$$16(1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

نقاط برخورد را پیدا می‌کنیم:



$$|x-2| = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow x = 6 \\ x-2 = -\frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$$

مثلث ABC در شکل قائم‌الزاویه است:





۲۵- مجموعه جواب $|x-x| > 4$ کدام است؟

(۲) $(-\infty, -2)$

(۱) $(2, +\infty)$

(۴) $(-2, 2)$

(۳) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر a مثبت باشد آنگاه:

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Rightarrow x < -a \text{ یا } x > a$$

برای x دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ در نظر می‌گیریم.

$$|x| - x > 4 \xrightarrow{x \geq 0} |x - x| > 4 \Rightarrow 0 > 4 \text{ تناقض}$$

$$|x| - x > 4 \xrightarrow{x < 0} |-x - x| > 4 \Rightarrow |x| > 2$$

$$\Rightarrow x < -2, x > 2$$

چون در حالت دوم، $x < 0$ فرض شده بود، پس فقط $x < -2$ قابل قبول است.

۲۶- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{3x+4}{x+3} \right| < x$ کدام بازه است؟

(۴) $(3, +\infty)$

(۳) $(2, +\infty)$

(۲) $(1, +\infty)$

(۱) $(0, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ، b, d هم‌علامت باشند، آنگاه مجاز به طرفین وسطین هستیم.

با توجه به اینکه x از قدرمطلق بیشتر است، پس مثبت است. و در نتیجه $3x+4$ و $x+3$ هم مثبت است. لذا می‌توانیم قدرمطلق را حذف کنیم و سپس طرفین وسطین کنیم:

$$\frac{3x+4}{x+3} < x \Rightarrow 3x+4 < x(x+3) \Rightarrow x^2 > 4 \xrightarrow{x > 0} x > 2$$

۲۷- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < |x|$ بازه (a, b) است، $b-a$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است:

x	α	β
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a

برای x دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $x > 0 \Rightarrow x^2 - 2x < x \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$

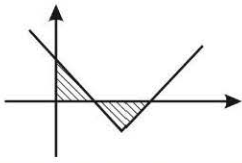
۲) $x < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < -x \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

ولی چون $x < 0$ فرض شده بود پس این حالت جواب ندارد.

بنابراین فقط بازه $(0, 3)$ جواب است، پس $b-a = 3$.



۲۸- در شکل مقابل نمودار تابع $y = |x - 2| - a$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار a مساحت دو ناحیه هاشور زده برابر است؟



۲ (۲)
 $2\sqrt{2} - 2$ (۴)

۱ (۱)
 $\sqrt{2} - 1$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

نقاط برخورد نمودار تابع با محورها را پیدا می‌کنیم:

با محور y : $x = 0 \Rightarrow y = 2 - a$

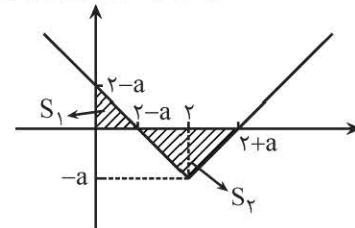
با محور x : $y = 0 \Rightarrow |x - 2| = a \Rightarrow x = 2 \pm a$

$$S_1 = \frac{1}{2} (2 - a)(2 - a) = \frac{(2 - a)^2}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (a)(2 + a - (2 - a)) = a^2$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{(2 - a)^2}{2} = a^2 \Rightarrow a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \xrightarrow{a > 0} a = -2 + 2\sqrt{2}$$



۲۹- نمودار تابع $f(x) = x - |1 - 2x|$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

پاسخ: گزینه ۲

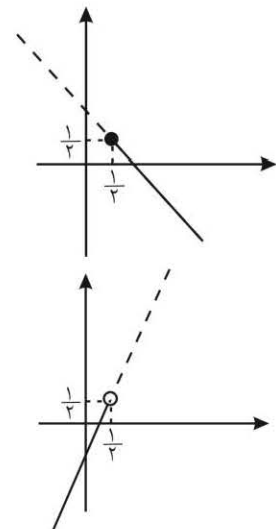
روش اول: ریشه عبارت داخل قدرمطلق $\frac{1}{2}$ است پس برای x دو حالت $x \geq \frac{1}{2}$ و $x < \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - 2x| = 2x - 1$$

$$f(x) = x - (2x - 1) = -x + 1$$

$$x < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - 2x| = 1 - 2x$$

$$f(x) = x - (1 - 2x) = 3x - 1$$



نمودار f از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

روش دوم: اگر $x < 0$ باشد، آنگاه $x - |1 - 2x|$ نیز منفی است یعنی حالت $x < 0$ و $y > 0$ اتفاق نمی‌افتد، پس از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.



۳۰- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{3x-2}{2} \right| < x$ بازه (a, b) است، نقطه میانی این بازه کدام است؟

۱(۴

۱/۲(۳

۱/۴(۲

۱/۵(۱

پاسخ: گزینه ۳

نکته: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$$\left| \frac{3x-2}{2} \right| < x \Rightarrow -x < \frac{3x-2}{2} < x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x < \frac{3x-2}{2} \Rightarrow -2x < 3x-2 \Rightarrow x > \frac{2}{5} \\ \frac{3x-2}{2} < x \Rightarrow 3x-2 < 2x \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

پس جواب به صورت $\frac{2}{5} < x < 2$ است.

$$\text{نقطه میانی} = \frac{\frac{2}{5} + 2}{2} = 1/2$$

@Doping_Maze | @BioMazeFree

